Geometrie

Goldener Schnitt
Fünfecke und Zehnecke

Dafür sollte man sich Zeit nehmen!

Datei Nr. 11350

Friedrich Buckel

Stand 17. September 2008

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Demo: Mathe-CD

Inhalt

§ 1 Der goldene Schnitt 1

Definition und Verhältnisgleichung 1
3 Konstruktionen 4
Eigenschaften der stetigen Teilung 7
Bedeutung des goldenen Schnittes 8

§ 2 Das goldene Dreieck 9

§ 3 Regelmäßiges Fünfeck, Zehneck, Pentagramm 10

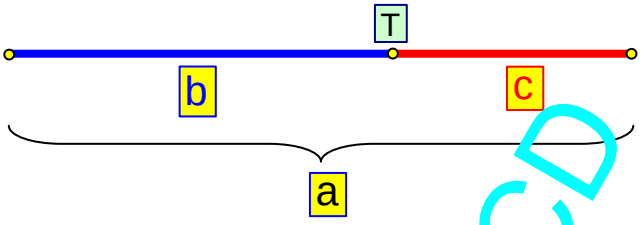
Grundfakten 10
Konstruktion des Fünfecks nur mit dem Zirkel 11
Die Diagonalen des Fünfecks erzeugen ein Pentagramm 12
Goldener Schnitt im regelmäßigen Zehneck -
Länge der Zehn- und Fünfeckseiten berechnen 13
Flächeninhalt des regelmäßigen Fünfecks 15
Konstruktion der Fünfeck- und Zehneckseite mit der
stetigen Teilung 17

Demo: Mathe-CD

§ 1 Der Goldene Schnitt

1.1 Definition und Verhältnisgleichung

Der **Goldene Schnitt** (lat. sectio aurea) ist ein bestimmtes Verhältnis zweier Längen von Strecken, das in der Kunst und Architektur oft als ideale Proportion und als Inbegriff von Ästhetik und Harmonie angesehen wird. Darüber hinaus tritt es auch in der Natur in Erscheinung und zeichnet sich durch eine Reihe interessanter mathematischer Eigenschaften aus. Man spricht dabei auch von der stetigen Teilung einer Strecke:



Merke:

Der Punkt T teilt die Strecke a stetig (führt also einen goldenen Schnitt aus), wenn diese Verhältnisgleichung gilt:

$$\boxed{a:b=b:c} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\frac{a}{b}=\frac{b}{c}}$$

Man kann dies auch so formulieren:

Die größere Teilstrecke muss die mittlere Proportionale sein.

Herleitung einer Berechnungsformel:

Bedenkt man, dass b + c = a gilt, dann kann man ersetzen: c = a – b .
Dies liefert:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{a-b} \qquad (*)$$

$$a(a-b)=b^2 \quad \text{bzw.} \quad a^2-ab=b^2$$

Stellen wir die Aufgabe so, dass a gegeben und b gesucht ist, dann stellen wir diese Gleichung nach b um und lösen eine quadratische Gleichung:

$$b^2+ab-a^2=0$$

$$b_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+4a^2}}{2}=\frac{-a\pm\sqrt{5a^2}}{2}=\frac{-a\pm a\sqrt{5}}{2}=a\cdot\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Da die Lösung mit dem Minuszeichen zu einer negativen Streckenlänge führt, scheidet sie hier aus. Es bleibt:

$$b=a\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0{,}618\cdot a$$

Demo - Mathe-CD

Man erhält daraus dieses Verhältnis:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$$

Und wegen der Definition des goldenen Schnittes gilt dasselbe Verhältnis für c und b:

$$\boxed{\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618}$$

Bemerkung:

Man kann die Gleichung (*) auch anders verarbeiten und gleich auf das Verhältnis $\frac{b}{a}$ lossteuern:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} \quad \text{bzw.} \quad \frac{b}{a} = \frac{a-b}{b}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b} - \frac{b}{b} \quad \text{bzw.} \quad \frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{b}{a}} - 1$$

Nennen wir das gesuchte Verhältnis $\frac{b}{a} = x$, dann haben wir diese Gleichung vor uns:

$$x = \frac{1}{x} - 1 \quad \text{bzw.} \quad x^2 = 1 - x \quad \text{bzw.} \quad x^2 + x - 1 = 0$$

Die Lösung für diese Gleichung ist:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Demo: Mathe-CD

1.2 Konstruktionen für den goldenen Schnitt

Auf der Mathe-CD!

Demo: Mathe-CD